國立政治大學 應用數學系 104學年度第二學期　學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM

考試科目 Course	實變函數論	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	105年3月8日 上午9:00~12:00	試題編號 Course No.	

本試卷共有6個題目，

碩士班：請選5題作答，每題20分，請在答案卷最前面註明所選的5題，否則依學生作答之前5題計分。

博士班：6題全做答，每題17分，超過100分則以100分計。

1. Let $Q = [0,1]\times\cdots\times[0,1] \subseteq \mathbb{R}^n$ and $f, \log f \in L^1(Q)$. Show that

$$e^{\int_Q \log f\,dx} \le \int_Q f\,dx .$$

2. Let $f \in L^1(\mathbb{R})$, the Fourier transform $\hat{f}$ of f is defined to be

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Show that if $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, then $(f*g)^{\wedge} = \hat{f}\hat{g}$, where $f*g$ is the convolution of f and g, i.e.,

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy , \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Compute the volume of $B(a;r)$ in $\mathbb{R}^n$ and the surface area of the sphere $\partial B(a;r)$, where $B(a;r)$ is the open ball and $\partial B(a;r)$ is the boundary of $B(a;r)$.

4. Show that every compact metric space is separable.
5. Does convergence in measure imply convergence a.e.?
6. Let $(X, \mathcal{S}, \mu)$ be a measure space with $\mu(X) < \infty$. Show that $L^\infty(X,\mathcal{S},\mu) \subseteq L^p(X,\mathcal{S},\mu)\ \forall\, p>0$ and for all $f \in L^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$, $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ as $p \to \infty$.

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，☐ 使用簡易計算機　←請出題老師勾選，謝謝！

命題老師：(Teacher)	陳天進	（簽章）105年3月2日 (Signature & date)	試題隨卷繳交