（ 榮譽第一 ）

國立政治大學 應用數學系 105 學年度第一學期　學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM

考試科目 Course	實變函數論	開課系級 Dept, & Class	研究所	日期 Date, Period	105 年 9 月 19 日 下午 14:00~17:00	試題編號 Course	

本試卷共有 6 個題目，
碩士班：請選 5 題作答，每題 20 分，請在答案卷最前面註明所選的 5 題，否則依學生作答之前 5 題計分。
博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

一. Show that every metric space is normal.

二. Is $L^p(X,\mathcal{S},\mu)$ a Hilbert space with respect to the p-norm?
(You must justify your answer).

三. Let f be a nonnegative measurable function on $[0,1]$. Show that
$$\log\int_0^1 g(x)\,dx \geq \int_0^1 \log g(x)\,dx$$
whenever the right side is defined.

四. Let $f_n \to f$ in $L^p(X,\mathcal{S},\mu)$, $1 \leq p < \infty$, and $\{g_n\}$ be a sequence of measurable functions on X which is uniformly bounded on X and $g_n \to g$ a.e. on X. Show that $g_n f_n \to g f$ in $L^p(X,\mathcal{S},\mu)$.

五. Let $(X,\mathcal{S},\mu)$ be a finite measure space, f_n, $n=1,2,\cdots$, and f be measurable function on X which are finite a.e. on X.
Show that $f_n \xrightarrow{\mu} f$ iff $\displaystyle\int_X \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\,d\mu \to 0$ as $n\to\infty$.

六. Show that the function $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$, $x>0$, is well-defined and,
$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{x-1}e^{-t}\,dt \to \Gamma(x)$$
uniformly on compact subsets of $(0,\infty)$.

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，☐ 使用簡易計算機　←請出題老師勾選，謝謝！

命題老師：(Teacher)	（簽章）105 年 9 月 12 日 (Signature & date)	試題隨卷繳交

命題紙使用說明：試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。

Remarks : For the convenience of reprinting please Write questions in black or blue-black (but no red) ink.