國立政治大學 **110** 學年度第一學期 博士班資格考 試題卷

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM

系別	應用數學系	考試科目	實變函數論	考試日期	**2021** 年 **9** 月 **27** 日	考試時間	**09:00** 至 **12:00**

注意事項

- 務必作答於答案卷並標明題號，請勿作答於試題卷上，否則不予計分。
- 本試題卷共有 **7** 個問題**,** 總計 **100** 分。

1. (15 %) Let

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x) & \text{for } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{for } x=0.\end{cases} \quad \text{and} \quad g(x)=\begin{cases} x^3\sin(1/x) & \text{for } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{for } x=0.\end{cases}$$

   (a) (7%) Determine whether f and g are of bounded variation on $[0,1]$. Give your proof in each case.

   (b) (8%) Determine whether f and g are absolutely continuous functions on $[0,1]$. Give your proof in each case.

2. (15 %) Let $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of measurable functions on $\mathbb{R}^n$. Prove that the set $\{x\in\mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ exists}\}$ is a measurable set.

3. (15 %) Let

$$f(x,y)=\begin{cases} -1/y^2 & \text{for } 0<x<y<1,\\ 1/x^2 & \text{for } 0<y<x<1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

   Does $f\in L^1([0,1]\times[0,1])$? Give your reason.

4. (10 %) Let $f\in L^1((0,1))$, show that $x^k f(x)\in L^1((0,1))$ for $k\in\mathbb{N}$ and $\lim_{k\to\infty}\int_0^1 x^k f(x)dx=0$.

5. (15 %) If $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Show that there exists a sequence $\{C_k\}$ of continuous functions with compact support such that

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f-C_k|dx\to 0 \quad \text{as } k\to\infty.$$

6. (15 %) For $1\le p\le\infty$, prove that $L^p(\mathbb{R}^n)$ is a Banach space with norm $\|f\|_p$.

7. (15 %) Let $1\le p\le\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ and $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Prove that

$$\|f*g\|_p\le\|f\|_p\|g\|_1.$$

   Here $(f*g)(x)$ is defined by

$$(f*g)(x):=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

命題老師簽章： **(Teacher's Signature)**	日期： **(Date)** 年 月 日	■ 試題隨卷繳交 ■ 不可使用計算機

命題紙使用說明： 試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字 (紅色不能製版請勿使用)。
Remarks： For the convenience of reprinting please Write questions in black or blue-black (but no red) ink.