| 考試科目 Course | 數理統計 | 開課系級 Dept, & Class | 研究所 | 日期 Date, Period | 107年10月1日 上午 9:00~12:00 | 試題編號 Course No. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

本試卷共有 6 個題目，
博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

1. Let $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ and let $Y \sim N(\gamma, \sigma^2)$. Suppose $X$ and $Y$ are independent. Define $U = X+Y$ and $V = X-Y$. Show that $U$ and $V$ are independent normal random variables. Find the distribution of each of them.

2. Let $X_1, X_2, \cdots$ be a sequence of random variables that converges in probability to a constant $c$. Assume that $P(X_i > 0) = 1$ for all $i$. Let $Y_i = \sqrt{X_i}$ and $Z_i = c/X_i$. Show that both the sequence $\{Y_i\}$ and $\{Z_i\}$ converge in probability.

3. Let $X_1, \cdots, X_n$ be a random sample from a population with pdf
$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0<x<1, \quad \theta>0.$$
(a) Is $\sum_{i=1}^{n} X_i$ sufficient for $\theta$? Explain.
(b) Find a complete sufficient statistic for $\theta$.

4. Suppose that the random variable $Y_1, \cdots, Y_n$ satisfy
$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \cdots, n$$
where $x_1, \cdots, x_n$ are fixed constants, and $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ are i.i.d. $N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2$ unknown. Find the Maximum Likelihood Estimator (MLE) of $\beta$, and show that it is an unbiased estimator of $\beta$.

本考試：☐ 不需使用簡易計算機，☑ 使用簡易計算機 ←請出題老師勾選，謝謝！

| | （簽章） 年 月 日 （Signature & date） | 試題隨卷繳交 |
|---|---|---|

命題紙使用說明：試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。
Remarks : For the convenience of reprinting please Write questions in black or blue-black ( but no red ) ink.

國立政治大學 應用數學系 107 學年度第一學期　學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM　　Page 2 /Total 3

| 考試科目 Course | 數理統計 | 開課系級 Dept. & Class | 研究所 | 日期 Date, Period | 107 年 10 月 1 日 上午 9:00~12:00 | 試題編號 Course No. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

本試卷共有 6 個題目，
博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

5. Let $X_1, \cdots, X_{n+1}$ be i.i.d. Bernoulli(p), and define the function h(p) by

$$h(p) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > X_{n+1} \mid p\right)$$

the probability that the first n observations exceed the (n+1)st.

(a) Show that

$$T(X_1, \cdots, X_{n+1}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{i=1}^{n} X_i > X_{n+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

is an unbiased estimator of h(p).

(b) Find the Uniformly Minimal Variance Unbiased Estimator (UMVUE) of h(p).

---

6. Let $X_1, \cdots, X_n$ be i.i.d. Poisson($\lambda$)

(a) Find a Uniformly Most Powerful Test (UMP test) of

$H_0: \lambda \leq \lambda_0$ v.s. $H_1: \lambda > \lambda_0$.

(b) Consider the specific case

$H_0: \lambda \leq 1$ v.s. $H_1: \lambda > 1$.

Use the Central Limit Theorem to determine the sample size n so a UMP test satisfies $P(\text{reject } H_0 \mid \lambda = 1) = 0.05$ and $P(\text{reject } H_0 \mid \lambda = 2) = 0.9$.

本考試：☐ 不需使用簡易計算機，☑ 使用簡易計算機　←請出題老師勾選，謝謝！

| | （簽章） 年 月 日 （Signature & date） | 試題隨卷繳交 |
|---|---|---|

命題紙使用說明：試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。

Remarks ：For the convenience of reprinting please Write questions in black or blue-black ( but no red ) ink.

國立政治大學 應用數學系 107 學年度第一學期 學科 考試試題

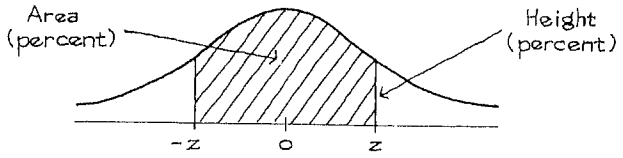
NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM



| 考試科目 Course | 數理統計 | 開課系級 Dept, & Class | 研究所 | 日期 Date, Period | 107 年 10 月 1 日 上午 9:00~12:00 | 試題編號 Course No. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

本試卷共有 6 個題目，

博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。




A NORMAL TABLE

| z | Height | Area | z | Height | Area | z | Height | Area |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 39.89 | 0 | 1.50 | 12.95 | 86.64 | 3.00 | 0.443 | 99.730 |
| 0.05 | 39.84 | 3.99 | 1.55 | 12.00 | 87.89 | 3.05 | 0.381 | 99.771 |
| 0.10 | 39.69 | 7.97 | 1.60 | 11.09 | 89.04 | 3.10 | 0.327 | 99.806 |
| 0.15 | 39.45 | 11.92 | 1.65 | 10.23 | 90.11 | 3.15 | 0.279 | 99.837 |
| 0.20 | 39.10 | 15.85 | 1.70 | 9.40 | 91.09 | 3.20 | 0.238 | 99.863 |
| 0.25 | 38.67 | 19.74 | 1.75 | 8.63 | 91.99 | 3.25 | 0.203 | 99.885 |
| 0.30 | 38.14 | 23.58 | 1.80 | 7.90 | 92.81 | 3.30 | 0.172 | 99.903 |
| 0.35 | 37.52 | 27.37 | 1.85 | 7.21 | 93.57 | 3.35 | 0.146 | 99.919 |
| 0.40 | 36.83 | 31.08 | 1.90 | 6.56 | 94.26 | 3.40 | 0.123 | 99.933 |
| 0.45 | 36.05 | 34.73 | 1.95 | 5.96 | 94.88 | 3.45 | 0.104 | 99.944 |
| 0.50 | 35.21 | 38.29 | 2.00 | 5.40 | 95.45 | 3.50 | 0.087 | 99.953 |
| 0.55 | 34.29 | 41.77 | 2.05 | 4.88 | 95.96 | 3.55 | 0.073 | 99.961 |
| 0.60 | 33.32 | 45.15 | 2.10 | 4.40 | 96.43 | 3.60 | 0.061 | 99.968 |
| 0.65 | 32.30 | 48.43 | 2.15 | 3.96 | 96.84 | 3.65 | 0.051 | 99.974 |
| 0.70 | 31.23 | 51.61 | 2.20 | 3.55 | 97.22 | 3.70 | 0.042 | 99.978 |
| 0.75 | 30.11 | 54.67 | 2.25 | 3.17 | 97.56 | 3.75 | 0.035 | 99.982 |
| 0.80 | 28.97 | 57.63 | 2.30 | 2.83 | 97.86 | 3.80 | 0.029 | 99.986 |
| 0.85 | 27.80 | 60.47 | 2.35 | 2.52 | 98.12 | 3.85 | 0.024 | 99.988 |
| 0.90 | 26.61 | 63.19 | 2.40 | 2.24 | 98.36 | 3.90 | 0.020 | 99.990 |
| 0.95 | 25.41 | 65.79 | 2.45 | 1.98 | 98.57 | 3.95 | 0.016 | 99.992 |
| 1.00 | 24.20 | 68.27 | 2.50 | 1.75 | 98.76 | 4.00 | 0.013 | 99.9937 |
| 1.05 | 22.99 | 70.63 | 2.55 | 1.54 | 98.92 | 4.05 | 0.011 | 99.9949 |
| 1.10 | 21.79 | 72.87 | 2.60 | 1.36 | 99.07 | 4.10 | 0.009 | 99.9959 |
| 1.15 | 20.59 | 74.99 | 2.65 | 1.19 | 99.20 | 4.15 | 0.007 | 99.9967 |
| 1.20 | 19.42 | 76.99 | 2.70 | 1.04 | 99.31 | 4.20 | 0.006 | 99.9973 |
| 1.25 | 18.26 | 78.87 | 2.75 | 0.91 | 99.40 | 4.25 | 0.005 | 99.9979 |
| 1.30 | 17.14 | 80.64 | 2.80 | 0.79 | 99.49 | 4.30 | 0.004 | 99.9983 |
| 1.35 | 16.04 | 82.30 | 2.85 | 9.69 | 99.56 | 4.35 | 0.003 | 99.9986 |
| 1.40 | 14.97 | 83.85 | 2.90 | 0.60 | 99.63 | 4.40 | 0.002 | 99.9989 |
| 1.45 | 13.94 | 85.29 | 2.95 | 0.51 | 99.68 | 4.45 | 0.002 | 99.9991 |

本考試：☐ 不需使用簡易計算機，☑ 使用簡易計算機 ←請出題老師勾選，謝謝！

（簽章） 年 月 日
（Signature & date）

試題隨卷繳交

命題紙使用說明：試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。

Remarks ：For the convenience of reprinting please Write questions in black or blue-black ( but no red ) ink.

國立政治大學 應用數學系 107 學年度第一學期 學科 考試試題

NATIONAL CHENGCHI UNIVERSITY EXAMINATION FORM Page /Total

| 考試科目 Course | 組合學 | 開課系級 Dept, & Class | 研究所 | 日 期 Date, Period | 107 年 10 月 1 日 下午 14:00~17:00 | 試題編號 Course No. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

本試卷共有 6 個題目，

博士班：6 題全做答，每題 17 分，超過 100 分則以 100 分計。

Show all your work.

1. (17pts) Show that for all integers $p, q \geq 3$, $R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q)$, where $R(p,q)$, $R(p,q-1)$ and $R(p-1,q)$ are Ramsey numbers.

2. (17pts) The vertices of a cube are to be colored and five colors are available, red, blue, green, yellow and purple.
Count the number of distinct colorings in which at least one green and one purple are used.

3. (17pts) The *chromatic plynomial* $P_k(G)$ of a graph $G$ is a polynomial in $k$ that gives for each positive number $k$, the number $P_k(G)$ of different $k$-colorings of $G$.
Show that no planar graph $G$ has a chromatic plynomial of the form $P_k(G) = (k^2 - 6k + 8)Q(k)$, where $Q(k)$ is positive for $k > 0$.

4. (17pts) (a) Find the exponential generating functions for $p_r$, the probability that the first two boxes each have at least one object when $r$ distinct objects are randomly distributed into $n$ distinct boxes.

   (b) Determine $p_r$.

5. (17pts) How many ways are there to arrange the letters in INTELLIGENT with at least two consecutive pairs of identical letters?

6. (17pts) Find a general solution to $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2 + 3n$.

本考試：☑ 不需使用簡易計算機，☐ 使用簡易計算機 ←請出題老師勾選，謝謝！

試 題 隨 卷 繳 交

命題紙使用說明：試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字 ( 紅色不能製版請勿使用 )。

Remarks : For the convenience of reprinting please Write questions in black or blue-black ( but no red ) ink.