

國立政治大學應用數學系九十一學年度第一學期研究生學科考試試題

科目：數理統計

本卷共有6個題目，請選5題作答。

1. 設 (X, Y) 在三角形區域 $0 < x < y < 1$ 上具有均勻分配，
 - (a) 求 $\text{Var}(Y | X = 1/3)$ (10%)
 - (b) 求 X/Y 的 p.d.f. (10%)
2. 設 X, Y 是隨機變數，證明：
 - (a) $EE(X | Y) = E(X)$ (5%)
 - (b) $\text{Var}(X) = \text{Var}E(X | Y) + E\text{Var}(X | Y)$ (15%)
3. (a) 設 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \Gamma(\alpha, \beta)$ ，求 $\alpha\beta$ 與 $\alpha^n\beta^n$ 的最佳不偏估計 (best unbiased estimator) 並且完整敘述所引用的重要定理。 (10%)
(b) 設 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} f(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^x$ ， $x = 0, 1, 2, \dots$ ， $0 < \theta < 1$ ，求 $(1 - \theta)/\theta$ 不偏估計的變異數之下限，又 \bar{X} 是不是 $(1 - \theta)/\theta$ 的有效不偏估計 (efficient unbiased estimator)。 (10%)
4. 設 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ ， μ, σ^2 是未知參數，且 $0 < \alpha < 1$ ，
 - (a) 導出 μ 的 $100(1 - \alpha)\%$ 信賴區間， (10%)
 - (b) 導出 σ 的 $100(1 - \alpha)\%$ 信賴區間。 (10%)
5. 設 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \theta^2)$ ，考慮 $H_0 : \theta = 1$ 對 $H_a : \theta > 1$ ，推導出大小 (size) 為 α 的 UMP 檢定， $0 < \alpha < 1$ ，並完整敘述所引用的重要定理。 (20%)
6. (a) 敘述並證明 Rao-Blackwell 定理。 (10%)
(b) 敘述並證明 Lehmann-Scheffé 定理。 (10%)