

國立政治大學應用數學系九十一學年度第二學期學科考試試題

科目：數理統計

選五題作答，但第三、四、六題必作。

一、設 X_1, X_2, \dots, X_n 是 iid 連續隨機變數，且 X_i 的 pdf 為 f_X ，cdf 為 F_X 。令 $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$, $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$ ，

(a) 求 (Y, Z) 的結合 cdf。 (10分)

(b) 求 (Y, Z) 的結合 pdf。 (10分)

(以 f_X 或 F_X 表示出結果)

二、設 X_1, X_2, \dots 是隨機變數序列，

(a) 敘述 $X_n \xrightarrow{d} X$ 以及 $X_n \xrightarrow{p} b$ 的定義，其中 X 是隨機變數， b 是常數。 (10分)

(b) 若 $EX_n = \mu_n, Var(X_n) = \sigma_n^2$ 且 $\mu_n \rightarrow a, \sigma_n^2 \rightarrow 0$ ，證明 $X_n \xrightarrow{p} a$ (10分)

♠ 在下列三、四、五題中，設 X_1, X_2, \dots, X_n 是獨立隨機變數， $X_i \sim E(i\theta), \theta > 0$ 。

三、(a) 分別求 θ 及 $\tau = \theta^2$ 的 MLE $\hat{\theta}$ 及 $\hat{\tau}$ (10分)

(b) $\hat{\theta}$ 是不是 θ 的一致推定 (consistent estimator)? (10分)

(必須敘述出所引用定理的內容)

四、(a) $\hat{\theta}$ 是不是 θ 的有效推定 (efficient estimator)? (10分)

(b) 求 $\eta = \theta^{-1}$ 的最佳不偏推定 (best unbiased estimator)。 (10分)

(必須敘述出所引用定理的內容)

五、(a) 求 θ 的 $100(1 - \alpha)\%$ 信賴區間。 (10分)

(b) 求 $\hat{\theta}_n$ (基於 n 個觀測值) 的漸近分配 (asymptotic distribution)。 (10分)

六、設 $X_1, X_2, \dots, X_{10} \stackrel{iid}{\sim} B(1, \theta)$ 。考慮 $H_0: \theta = 0.4$ 對 $H_a: \theta > 0.4$

(a) 導出大小 (size) 恰為 0.05 的 UMP 檢定。 (10分)

(b) 敘述出所引用定理的內容。 (10分)

注意： $n = 10, \theta = 0.4$ 時， $X \sim B(n, \theta)$ 的累積機率如下：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X \leq x)$	0.06	0.046	0.167	0.382	0.633	0.834	0.945	0.988	0.998	0.999	1